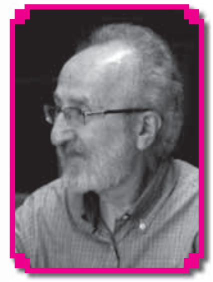
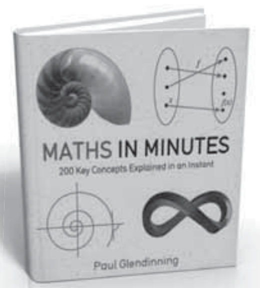
تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

ریاضیات در چند دقیقه

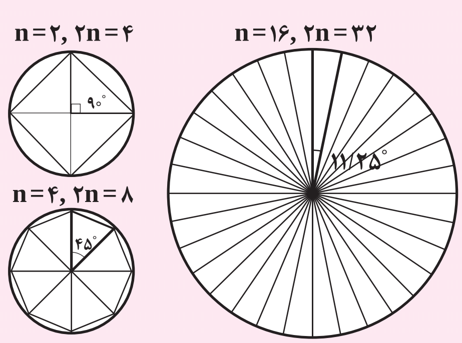




برآورد π

بسیاری از روش‌های برآورد ثابت گنگ π بر رهیافت دنباله‌ای متکی‌اند. **ارشمیدس سیراکوزی**، ریاضی‌دان یونانی، در زمانی به قدمت سه قرن پیش از میلاد، از دنباله‌ای برای تقریب‌های π تا دو رقم دهدهی استفاده کرد.

برای این کار، دایره‌ای به شعاع ۱ را در نظر می‌گیریم که پیرامون آن دقیقاً 2π می‌شود. با آغاز از یک مربع، یک‌سری n ضلعی منتظم درون آن رسم می‌کنیم. هر n ضلعی را می‌توان به‌عنوان گروهی از مثلث‌هایی با زاویهٔ رأس $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ تصور کرد. تقسیم هر یک از این مثلث‌ها به نصف، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای با طول وتر ۱، یعنی یک شعاع، و یک زاویهٔ $\frac{\theta}{2}$، به‌وجود می‌آورد. با استفاده از توابع مثلثاتی می‌توانیم اضلاع دیگر این مثلث، و از آنجا پیرامون یک چندضلعی را حساب کنیم.

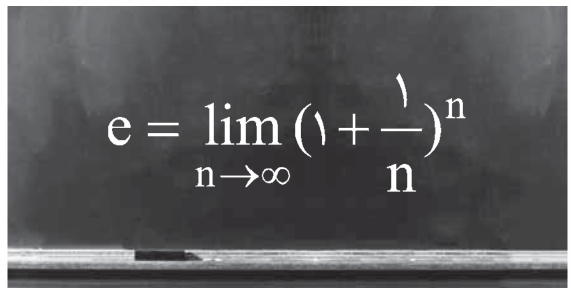


مراحل روش دنباله‌ای ارشمیدس در برآورد π، افزایش مقادیر n برآوردهایی دقیقاً افزاینده را برای π به‌دست می‌دهد.

البته ارشمیدس به مقادیر توابع مثلثاتی دسترسی نداشت، بنابراین مجبور بود n را به دقت انتخاب کند. رهیافت‌های جدید از تقریبات سری‌ها استفاده می‌کند. **ایزاک نیوتن** وقت و کوشش بسیاری برای محاسبهٔ π تا ۱۵ رقم دهدهی صرف کرد.

برآورد e

«ثابت اویلر» (Euler's constant)، یعنی عدد گنگ e، مبادی خود را در بررسی دنباله‌ها دارد، و می‌توان با استفاده از آن‌ها این ثابت را برآورد کرد. یکی از موارد برخورد با این ثابت در مسئلهٔ ربح مرکب، توسط **ژاکوب برنولی** (Jacob Bernoulli) در اواخر قرن هفدهم انجام شد. در ربح مرکب، هم از مبلغ سرمایه‌گذاری شده و هم از ربح یا سود حاصل



در زمان داده شده، در تعیین سود پرداخت شده در مرحلهٔ بعدی استفاده می‌شود. اگر نرخ بهره در سال ۱۰۰ درصد با پرداخت‌های نیم‌ساله باشد، آن‌گاه در مورد سرمایه‌گذاری ۱ پوند، پس از شش ماه بهرهٔ ۵۰ پنی پرداخت می‌شود که مبلغ کل را ۱/۵۰ پوند می‌کند. پس از شش ماه دیگر، ۷۵ پنی دیگر پرداخت می‌شود، و مجموع را به ۲/۲۵ پوند می‌رساند. به‌طور عمومی‌تر، کل بازگشت سرمایه‌مان در یک‌سال، چون به n دورهٔ زمانی برابر تقسیم شود، توسط فرمول زیر داده شده است:

$$(۱+\frac{۱}{n})^n$$

برنولی به این موضوع توجه کرد که هرچه n بزرگ‌تر شود، عبارت مزبور به مقداری هم‌گرا می‌شود که اکنون آن را «ثابت اویلر» می‌نامیم و به‌طور تقریب برابر عدد زیر است:

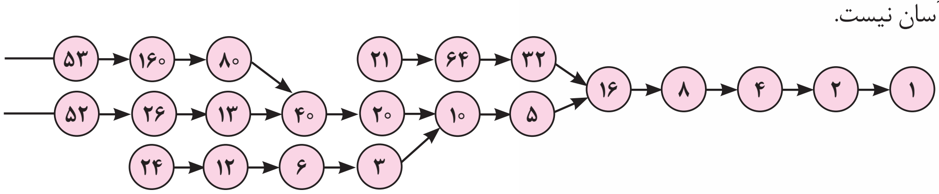
۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۶

تکرار

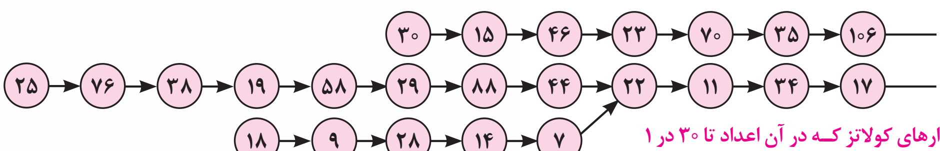
«تکرار» (iteration) فرایندی ریاضی است که در آن یک قاعده، عمل، یا بارها عمل می‌شود. تکرار مزبور می‌تواند یک دنباله را تولید کند. روش‌های تکرار غالباً در آنالیز عددی، و بررسی روش‌های مربوط به تبدیل مسائل ریاضی به زبانی که توسط رایانه فهمیده شود، به‌کار رفته است.

موضوع‌های دستگاه‌های دینامیکی و هرج و مرج، چگونگی حالات تکامل یک دستگاه را هنگامی که قاعده‌هایی ساده به‌طور مکرر به‌کار رفته‌اند، مشخص می‌کنند.

در همهٔ این کاربردها فهم اندازهٔ تأثیری که مقادیر اولیهٔ متفاوت می‌توانند در نتیجهٔ نهایی داشته باشند، دارای اهمیت است و این کار همیشه آسان نیست.



برای مثال، عدد صحیح و مثبت x را در نظر می‌گیریم. اگر این عدد فرد باشد، آن را در ۳ ضرب می‌کنیم و ۱ را به آن می‌افزاییم. اگر زوج باشد، آن را به ۲ تقسیم می‌کنیم. اکنون این قاعده را بار دیگر به‌کار می‌بریم، و تنها هنگامی به‌کار بردن آن را متوقف می‌کنیم که دنباله به ۱ برسد. در این صورت، هر مقدار اولیه‌ای از x که مورد آزمون قرار گرفته باشد، در مقدار متناهی‌ای از زمان متوقف می‌شود. در سال ۱۹۳۷، **لوثار کولاتز** (Lothar Collatz)، ریاضی‌دان آلمانی، حدس زد که این وضع در مورد هر مقدار ممکن x برقرار است، اما این موضوع هنوز باید اثبات شود.



نموداری از مدارهای کولاتز که در آن اعداد تا ۳۰ در ۱ به پایان دنباله می‌رسند. عدد ۲۷ به دلایل عملی حذف شده است. چه این عدد برای پیوستن به نمودار، و وصل شدن به آن، در عدد ۴۶، به ۹۵ مرحلهٔ دیگر نیاز دارد.